

Rozkłady teoretyczne zjawisk

Rozkłady teoretyczne - to opis natury, czy przybliżenie?

Jak powstały rozkłady teoretyczne?

- wyprowadzenie matematyczne
- suma inny zjawisk - rozkładów
- iloczyn zjawisk - rozkładów
- zbieganie innych rozkładów
- zbieganie parametrów
- obserwacje natury
- teoria przybliżająca naturę
- bez podstaw teoretycznych, ale dobrze przybliża

Rozkład normalny

- suma rozkładów
- zbieganie przez CTG
- opis losowości natury
- wiele czynników

Rozkład lognormalny

- iloczyn zjawisk
- zmienna, która jest asymetryczna
- relacja do rozkładu normalnego
- dodatnia dziedzina

Wykładniczy

- jedyny rozkład bez pamięci
- to opisu przeżycia
- stała stopa hazardu
- opadanie
- czas do zdarzenia

Weibull

- uogólnienie rozkładu wykładniczego
- do opisu przeżycia
- poluźnione założenie o stałej stopie hazardu
- różne kształty w zależności od k

© 2025 Maciej Buczak | Risk Research

Rozkład normalny

Wzór PDF

$f(x) = (1/(\sigma\sqrt{(2\pi)})) \times \exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2))$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Parametry

μ = średnia (lokalizacja)
σ^2 = wariancja (rozrzut)
σ = odchylenie standardowe

Dziedzina: $x \in (-\infty, +\infty)$

Właściwości

$E[X] = \mu$
$Var[X] = \sigma^2$

Symetryczny wokół μ
Kształt "dzwonu"
68% w $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$
95% w $[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$

Kluczowe cechy

- ✓ Suma normalnych = normalny
- ✓ CTG: suma dowolnych → normalny ($n\to\infty$)
- ✓ MLE prosty
- ✓ Dominujący w naturze

Zastosowania w ryzyku

- ✓ Stopy zwrotu (krótki termin)
- ✓ Błędy pomiarowe
- ✓ Agregacja strat (duży portfel, CTG)
- ✓ Value-at-Risk (normalny VaR)

© 2025 Maciej Buczak | Risk Research

Rozkład normalny

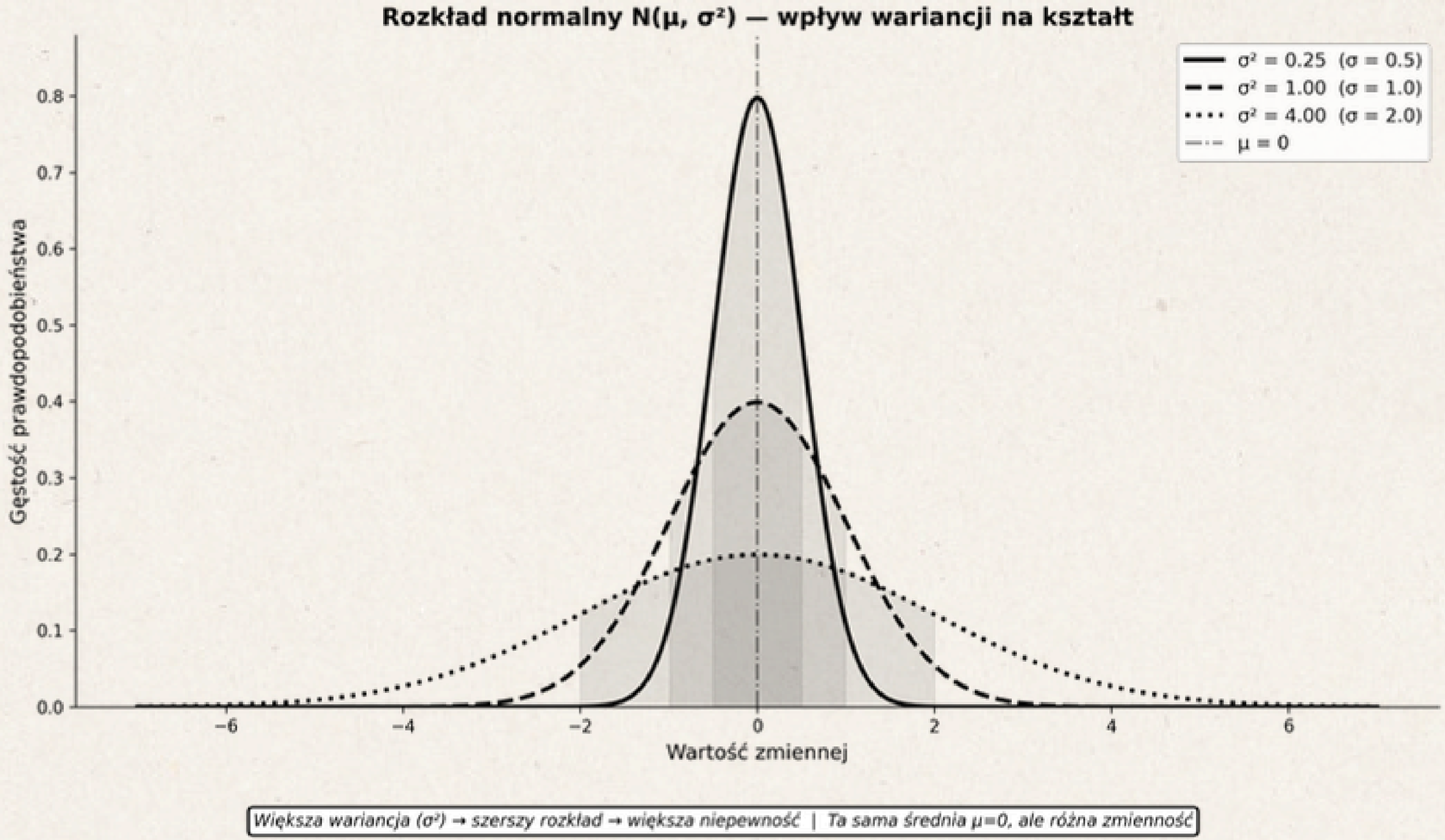
Rozkład normalny

Trzy rozkłady normalne z tą samą średnią μ=0 ale różnymi wariancjami:

- $\sigma^2 = 0.25$ ($\sigma = 0.5$) - linia ciągła, wysoki szczyt, wąski rozkład
- $\sigma^2 = 1.00$ ($\sigma = 1.0$) - linia przerywana, średni szczyt, średnia szerokość
- $\sigma^2 = 4.00$ ($\sigma = 2.0$) - linia kropkowana, niski szczyt, szeroki rozkład

Zacieniowane obszary pokazują przedział ±σ wokół średniej dla każdego rozkładu.

Większa wariancja = większa niepewność = szerszy rozkład = grubsze ogony. Ta sama średnia, ale całkowicie inna charakterystyka ryzyka.



© 2025 Maciej Buczak | Risk Research

Rozkład lognormalny

Wzór PDF

$f(x) = (1/(x\sigma\sqrt{(2\pi)})) \times \exp(-(\ln x - \mu)^2/(2\sigma^2))$

$X \sim LogNormal(\mu, \sigma^2)$
gdzie
μ, σ^2 = parametry ln(X), nie X!

Parametry

μ = średnia ln(X)
σ^2 = wariancja ln(X)

Dziedzina: $x \in (0, +\infty)$
ZAWSZE dodatni ✓

Właściwości

$E[X] = \exp(\mu + \sigma^2/2)$
$Var[X] = [\exp(\sigma^2) - 1] \times \exp(2\mu + \sigma^2)$

Skośny w prawo (positive skew)
Grube ogony (heavy tails)
Mediana = $\exp(\mu)$ ```

Związek z rozkładem normalnym

Jeśli X ~ LogNormal
To: ln(X) ~ Normal

Transformacja: X = exp(Y), Y ~ Normal

Kluczowe cechy

✓ Iloczyn log-normalnych = log-normalny
✓ Nie może być ujemny (ceny, stopy)
✓ Grube ogony (ekstremalne wartości)
✓ Naturalne dla procesów multiplikatywnych

Zastosowania w ryzyku

✓ Ceny akcji (Black-Scholes)
✓ Dochody, wealth distribution
✓ Straty operacyjne (pojedyncze zdarzenia)
✓ Credit exposure
✓ Insurance claims (duże)

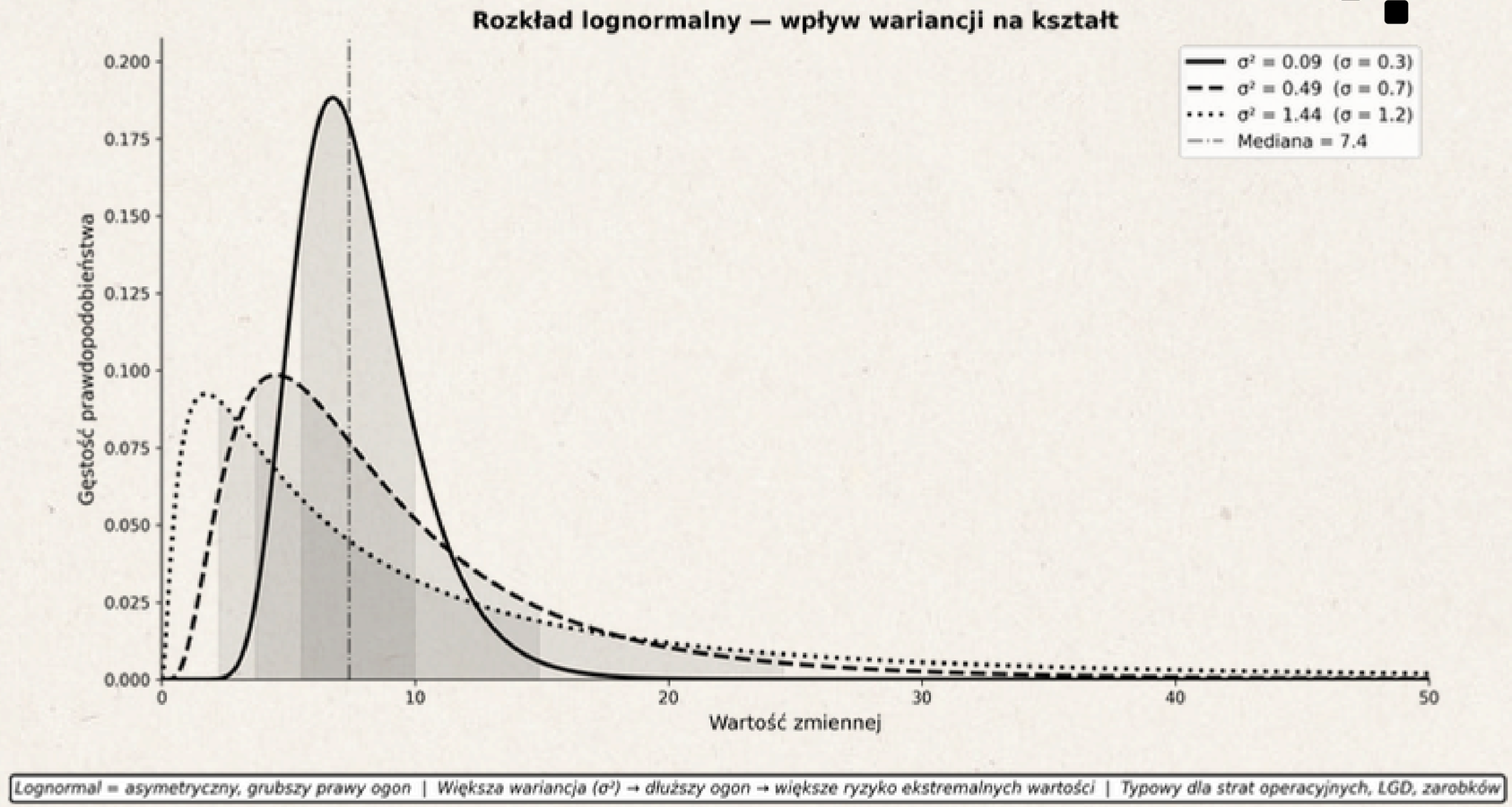
© 2025 Maciej Buczak | Risk Research

Rozkład lognormalny

Rozkład lognormalny

Trzy rozkłady lognormalne z tą samą medianą (~7.4) ale różnymi wariancjami:

- $\sigma^2 = 0.09$ ($\sigma = 0.3$) - linia ciągła, wysoki szczyt, wąski rozkład, krótki ogon
- $\sigma^2 = 0.49$ ($\sigma = 0.7$) - linia przerywana, niższy szczyt, szerszy rozkład, dłuższy ogon
- $\sigma^2 = 1.44$ ($\sigma = 1.2$) - linia kropkowana, bardzo niski szczyt, bardzo szeroki rozkład, bardzo długi prawy ogon



Lognormal = asymetryczny, grubszy prawy ogon | Większa wariancja (σ^2) → dłuższy ogon → większe ryzyko ekstremalnych wartości | Typowy dla strat operacyjnych, LGD, zarobków

Kluczowe różnice vs normalny

- Asymetria - lognormal zawsze skośny w prawo, nie ma lewego ogona (wartości zawsze >0)
- Grubszy prawy ogon - przy dużej wariancji ogon ciągnie się bardzo daleko w górę
- Typowy dla: strat operacyjnych (AMA), LGD, zarobków, cen nieruchomościWiększa wariancja w lognormal to nie tylko większa niepewność, ale przede wszystkim dużo grubszy prawy ogon = większe ryzyko ekstremalnych strat.

Zastosowanie

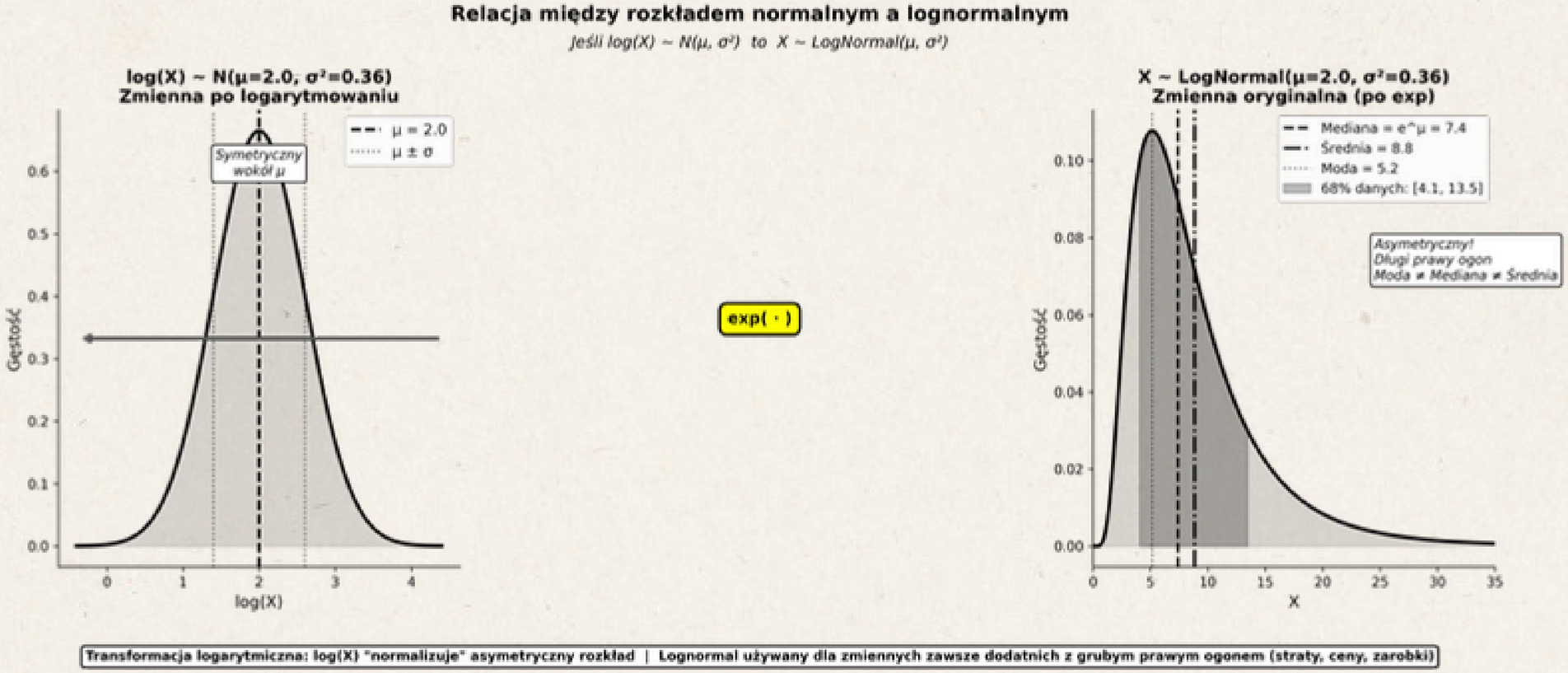
Straty operacyjne, LGD, ceny nieruchomości - wszystko co jest zawsze dodatnie i ma asymetrię w prawo naturalnie modeluje się lognormalnym.

© 2025 Maciej Buczak | Risk Research

Rozkład normalny → lognormalny

Zastosowanie: Straty operacyjne, LGD, ceny nieruchomości - wszystko co jest zawsze dodatnie i ma asymetrię w prawo naturalnie modeluje się lognormalem.

Kluczowa relacja:
Jeśli logarytmujesz zmienną lognormalną → dostajesz normalną
Jeśli exp' zmienną normalną → dostajesz lognormalną



Lewy panel - log(X) ~ N(μ=2, σ²=0.36):

- Symetryczny rozkład normalny
- Średnia = mediana = moda = 2.0
- Klasyczny kształt "dzwonka"

Prawy panel - X ~ LogNormal(μ=2, σ²=0.36):

- Asymetryczny - długi prawy ogon
- Moda < Mediana < Średnia (7.0 < 7.4 < 8.1)
- Zaciemniony obszar = 68% danych między exp(μ-σ) i exp(μ+σ)
- Wartości zawsze dodatnie (nie ma lewego ogona)

© 2025 Maciej Buczak | Risk Research